

CURSO DE BIOMEDICINA

CENTRO DE CIÊNCIAS DA SAÚDE
UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PETRÓPOLIS

MATEMÁTICA

AULA 7- FUNÇÕES

EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

VERSÃO 1 - MAIO DE 2018

Professor: Luís Rodrigo

E-mail: luís.goncalves@ucp.br

Site: <http://www.lncc.br/~lrodrigo>

Conteúdo Programático

✓ ...

1

Função Exponencial

1.1

Função Exponencial

Definições

Função Exponencial

5

✓ É qualquer função na qual a variável independente, geralmente **x**, é o **expoente** da função.

✓ Uma função exponencial básica tem a forma:

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 0$$

✓ O **domínio** de uma função exponencial básica são todos os **números reais**.

Função Exponencial

Propriedades

6

- ✓ Considerando que $a, b > 0$ então, para todos os x e y (reais), temos:
 - $a^x a^y = a^{x+y}$
 - $(ab)^x = a^x b^x$
 - $(a^x)^y = a^{xy}$
 - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
 - $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Função Exponencial

O número e

7

- ✓ O número e , denominado de base exponencial natural, pode ser definido como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

- ✓ Ele é um número **irracional** cujo valor aproximado é:

2,718281828459045...

1.2

Função Exponencial

Exemplos de Uso

Função Exponencial:

Exemplos de Uso

9

✓ Juros Composto:

- ✓ Se um valor de P reais é investido a uma taxa anual de juros r , e os juros são creditados n vezes ao ano, o montante $A(t)$ gerado em um período de tempo t é dado por:

$$A(t) = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

Função Exponencial:

Exemplos de Uso

10

✓ Juros Composto Contínuo:

- ✓ Se um valor de P reais é investido a uma taxa anual de juros r , e os juros são creditados **continuamente**, o montante $A(t)$, em qualquer instante t posterior, é dado por:

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Função Exponencial:

Exemplos de Uso

11

✓ Crescimento Populacional Ilimitado:

- ✓ Se uma população, constituída inicialmente de N_0 indivíduos, pode ser modelada como **crecente** e **sem limites**. Podemos obter a população $N(t)$, em qualquer instante t utilizando:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

- ✓ Onde k é uma **constante** a ser determinada

Função Exponencial:

Exemplos de Uso

12

✓ Crescimento Populacional Logístico:

- ✓ Se uma população, constituída inicialmente de N_0 indivíduos, pode ser modelada como **crecente** e **limitada** devido aos recursos disponíveis. Podemos obter a população $N(t)$, em qualquer instante t utilizando:

$$N(t) = \frac{N_0 P}{N_0 + (P - N_0)e^{-kt}}$$

- ✓ Onde k é uma constante a ser determinada

Função Exponencial:

Exemplos de Uso

13

✓ Decaimento Radioativo:

- ✓ Se uma quantidade Q_0 de uma substância radioativa está presente no instante $t = 0$, então para determinar a quantidade $Q(t)$ presente no instante t podemos utilizar:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

- ✓ Onde k é uma constante a ser determinada

1.3

Função Exponencial

Exercícios

Função Exponencial:

Exercícios

15

1) Analise e esboce o gráfico de função exponencial básica na forma $f(x) = a^x, a > 1$

✓ Dicas:

a) Analise o comportamento quando $x_1 < x_2$

b) Verifique o que ocorre quando $x \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$

Função Exponencial:

Exercícios

16

2) Analise e esboce o gráfico de função exponencial básica na forma $f(x) = a^x, a < 1$

✓ Dicas:

a) Analise o comportamento quando $x_1 < x_2$

b) Verifique o que ocorre quando $x \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$

Função Exponencial:

Exercícios

17

3) Esboce o gráfico das funções, abaixo, no intervalo

$$-4 < x < 4$$

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 2^{-x}$

Função Exponencial:

Exercícios

18

4) Calcule a quantidade de dinheiro se R\$ 1.000,00 são investidos à 5% de juros a cada 7 anos.

❖ Capitalizados:

- a) anualmente
- b) Trimestralmente
- c) Mensalmente
- d) Diariamente
- e) Continuamente

Função Exponencial:

Exercícios

19

5) Demonstre o cálculo da base exponencial natural (e)

❖ Dica:

a) calcule $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b) Quando “ n ” assume: 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6

Função Exponencial:

Exercícios

20

6) Simplifique as expressões

$$a) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$b) \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Função Exponencial:

Exercícios

21

7) Encontre os zeros da função:

$$f(x) = xe^{-x} - e^{-x}$$

Função Exponencial:

Exercícios

22

- 8) Inicialmente o número das bactérias em uma cultura é de **400**. Sabendo-se que: o valor **dobra** a cada **3 horas**, e que o número de indivíduos pode ser expresso por:

$$N(t) = 400(2)^{\frac{t}{3}}$$

- a) Determine o número de bactérias presente nesta cultura depois de **24 horas**

Função Exponencial:

Exercícios

23

- 9) Populações humanas podem ser modeladas sobre curtos períodos de tempo utilizando a função de crescimento exponencial ilimitado. Se um país tem uma população de **22 milhões** em **2000** e mantém uma taxa de crescimento de **1%, ao ano**, então sua população pode ser modelada por:

$$N(t) = 22e^{0,01t}$$

- a) Estime a população em **2010**, **2020** e **2030**

Função Exponencial:

Exercícios

24

- 9) Um rebanho de **500** cervos são introduzidos em uma ilha e estima-se que a **população máxima** será de **2.000**. Supondo que o tamanho da população pode ser dado pela função de crescimento logístico:

$$N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$$

Estime a população após:

- a) **1** ano
- b) **20** anos
- c) **50** anos

2

Funções Logarítmicas

2.1

Funções Logarítmicas

Definições

Função Logarítmica:

27

- ✓ Uma função logarítmica:

$$f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

- ✓ é a inversa de uma função exponencial:

$$f(x) = a^x$$

- ✓ Assim se: $y = \log_a x$

- ✓ Então: $x = a^y$

Função Logarítmica:

28

- ✓ A sentença $10^3=1000$ pode ser escrita em termos de **logaritmos** na base **10**.
- ✓ Como **3** é o expoente ao qual **10** deve ser elevado para obter **1000**.
- ✓ Logo: $\log_{10} 1000 = 3$

Função Logarítmica:

Relação entre Logaritmo e Exponencial

29

✓ Seja:

$$✓ \log_a a^x = x$$

$$✓ a^{\log_a x} = x$$

Função Logarítmica:

Relação entre Logaritmo e Exponencial

30

✓ Seja:

$$✓ \log_a a^x = x \rightarrow \log_{10} 10^3 = 3$$

$$✓ a^{\log_a x} = x \rightarrow 10^{\log_{10} 3} = 3$$

Função Logarítmica:

Propriedades

31

- ✓ Sejam M e N números reais positivos:
 - ✓ $\log_a 1 = 0$
 - ✓ $\log_a a = 1$
 - ✓ $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
 - ✓ $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
 - ✓ $\log_a (M^p) = p \log_a M$

Função Logarítmica:

Funções Especiais

32

- ✓ Sejam:
 - ✓ $\log_{10}x$ é abreviada como:
 - ✓ $\log_e x$ é abreviada como:

Função Logarítmica:

Funções Especiais

33

✓ Sejam:

✓ $\log_{10}x$ é abreviada como: $\log x$ (logaritmo)

✓ $\log_e x$ é abreviada como: $\ln x$ (logaritmo natural)

2.2

Funções Logarítmicas

Exercícios

Função Logarítmica:

35

1) Reescreva as função, utilizando a forma exponencial

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_5 25 = \frac{1}{2}$

c) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

d) $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

e) $\log_b c = d$

f) $\log_e (x^2 + 5x - 6) = y - C$

Função Logarítmica:

36

2) Reescreva as função, utilizando a forma logarítmica

$$a) 3^5 = 243$$

$$b) 6^{-3} = \frac{1}{216}$$

$$c) 256^{\frac{3}{4}} = 64$$

$$d) \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$$

$$e) u^m = p$$

$$f) e^{at+b} = y - C$$

Função Logarítmica:

37

3) Calcule os seguintes logaritmos

a) $\log_7 49$

b) $\log_4 256$

c) $\log_{10} 0,000001$

d) $\log_{27} \frac{1}{9}$

e) $\log_{\frac{1}{5}} 125$

Função Logarítmica:

38

- 4) Determine o **domínio** e a **imagem** da função logarítmica na base a (\log_a).
- 5) Calcule $\log_5 -25$ e determine seu domínio e sua imagem

Função Logarítmica:

39

6) Utilizando o mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico de:

a) $f(x) = a^x, a > 1$

b) $f^{-1}(x) = \log_a x$

c) $f(x) = x$

Função Logarítmica:

40

7) Esboce o gráfico de $f(x) = \log_5 x$ para $\frac{1}{5} \geq x \geq 25$

8) Esboce o gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ para $\frac{1}{4} \geq a \geq 16$

Função Logarítmica:

41

9) Calcule utilizando as relações entre funções logarítmicas e exponencial:

a) $\log_3 3^5$

b) $\log_2 256$

c) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$

d) $\log 0,00001$

e) $5^{\log_5 3}$

f) $e^{\ln \pi}$

g) $a^{\log_a(x^2-5x+6)}$

h) $36^{\log_6 7}$

3

Equações Exponenciais e Logarítmicas

3.1

Equações Exponenciais e Logarítmicas

Exponenciais

Equações Exponencial e Logarítmica:

Exponenciais

44

- ✓ São equações que envolvem **uma variável** em **um expoente**
- ✓ Para resolver este tipo de equação, geralmente tentamos determinar o **logaritmo de ambos os lados**, geralmente na base **10** ou **e**

Equações Exponencial e Logarítmica:

Exponenciais

45

- ✓ Exemplo: $e^x = 2$
 - ✓ $\ln(e^x) = \ln 2$
 - ✓ $x = \ln 2$

3.2

Equações Exponenciais e Logarítmicas

Logarítmicas

Equações Exponencial e Logarítmica:

Logarítmicas

47

- ✓ São equações que envolvem o **logaritmo de uma variável** ou uma expressão variável
- ✓ Para determinar o resultado, geralmente **reescrevemos** a expressão em **forma de exponencial**.
- ✓ Se ocorre mais de uma expressão logarítmica, elas **podem ser combinadas** utilizando as propriedades de logaritmo.

Equações Exponencial e Logarítmica:

Logarítmica

48

- ✓ Exemplo: $\log_2(x - 3) = 4$
 - ✓ $2^{\log_2(x-3)} = 2^4$
 - ✓ $(x - 3) = 2^4$
 - ✓ $x = 2^4 + 3$
 - ✓ $x = 19$

3.3

Equações Exponenciais e Logarítmicas

Mudança da Base

Equações Exponencial e Logarítmica:

Logarítmicas – Mudança de Base

50

- ✓ As expressões logarítmicas podem ser reescritas em termos de outras bases:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Equações Exponencial e Logarítmica:

Logarítmicas – Mudança de Base

51

- ✓ Encontre uma expressão, em termos de logaritmos na base e para $\log_5 10$

$$\log_5 10 = \frac{\ln 10}{\ln 5} \cong 1,43$$

3.4

Equações Exponenciais e Logarítmicas

Escalas Logarítmicas

Equações Exponencial e Logarítmica:

Escala Logarítmicas

53

- ✓ Trabalhar com números que **variam** em **escalas muito grandes** nem sempre é simples:

- ✓ Por exemplo:

De **0,000.000.000.001** à **10.000.000.000**

- ✓ Podemos tomar o trabalho mais eficiente se utilizarmos números logarítmicos, que neste caso variam de :

De **-12** à **+10**

Equações Exponencial e Logarítmica:

Escala Logarítmicas – Exemplos:

54

Intensidade de Som:

- ✓ A **Escala Decibel**, que realiza a medição de intensidade sonora é dada por:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

- ✓ Sendo que:
 - ✓ **D**: é a magnitude Decibel
 - ✓ **I**: é a intensidade de som (watts p/metro ao quadrado)
 - ✓ **I₀** : é a intensidade do menor som audível

Equações Exponencial e Logarítmica:

Escala Logarítmicas – Exemplos:

55

Intensidade Sísmica:

- ✓ A **Escala Richter**, que determina a energia liberada por um Terremoto (medida em Joules):

$$R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

- ✓ Sendo que:
 - ✓ **R**: é a magnitude do terremoto
 - ✓ **E**: é a energia liberada
 - ✓ **E_0** : é a energia liberada em um terremoto muito fraco.

3.5

Equações Exponenciais e Logarítmicas

Exercícios

CURSO DE BIOMEDICINA

CENTRO DE CIÊNCIAS DA SAÚDE
UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PETRÓPOLIS

MATEMÁTICA

AULA 7- FUNÇÕES

EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

VERSÃO 1 - MAIO DE 2018

Professor: Luís Rodrigo

E-mail: luís.goncalves@ucp.br

Site: <http://www.lncc.br/~lrodrigo>