

CURSO DE BIOMEDICINA

CENTRO DE CIÊNCIAS DA SAÚDE

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PETRÓPOLIS

Matemática - Biomedicina

Funções Polinomiais do 2o. Grau

Maio de 2018

Luís Rodrigo de O. Gonçalves

luis.goncalves@ucp.br

Petrópolis, 16 de Maio de 2018

Função Quadrática

Definição

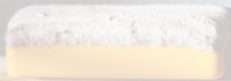
Principais pontos da parábola

Estudo do sinal da função

Exercícios

FUNÇÃO QUADRÁTICA

DEFINIÇÃO



Função Quadrática

Definição

- ▶ Dados três números reais **a**, **b** e **c**, com $a \neq 0$
- ▶ Denominamos **função quadrática** (ou do 2^o grau) à função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- ▶ Sendo que:
 - ✓ **a**, **b** e **c** são **números reais**;
 - ✓ **x** é a **variável independente**;
 - ✓ **y** ou **f(x)** é a **variável dependente**

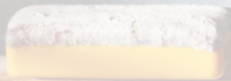
Função Quadrática

Definição

- ▶ O **gráfico** da função quadrática é uma curva denominada **parábola**.
- ▶ Cuja **concavidade** é definida em função do valor de a , ou seja, quando:
 - ✓ $a > 0$: concavidade voltada para cima - **CVC**
 - ✓ $a < 0$: concavidade voltada para baixo - **CVB**

FUNÇÃO QUADRÁTICA

PRINCIPAIS PONTOS DA PARÁBOLA



Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

- ▶ A interseção com o eixo x ocorre quando $y = 0$
- ▶ Neste caso teremos:
$$\checkmark ax^2 + bx + c = 0$$
- ▶ Para o cálculo de x devemos utilizar a fórmula:

Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

▶ A interseção com o eixo x ocorre quando $y = 0$

▶ Neste caso teremos:

$$\checkmark ax^2 + bx + c = 0$$

▶ Para o cálculo de x devemos utilizar a fórmula:

$$\checkmark x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ Sendo:

$$\checkmark x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\checkmark x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ Onde:

Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

▶ A interseção com o eixo x ocorre quando $y = 0$

▶ Neste caso teremos:

$$\checkmark ax^2 + bx + c = 0$$

▶ Para o cálculo de x devemos utilizar a fórmula:

$$\checkmark x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ Sendo:

$$\checkmark x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\checkmark x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ Onde:]

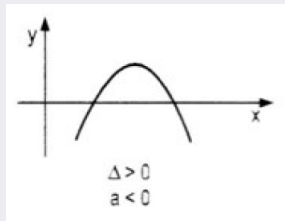
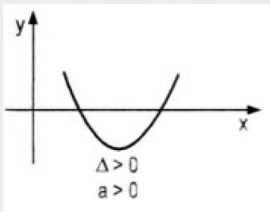
$$\checkmark \Delta = b^2 - 4ac$$

Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

Interseção com o eixo x - $\Delta > 0$

- ▶ Quando $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo x em **dois pontos** x_1 e x_2

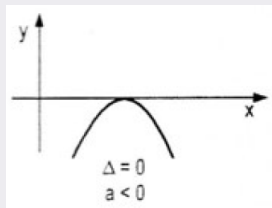
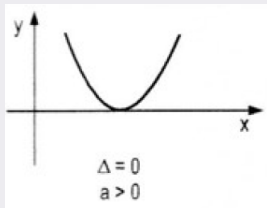


Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

Interseção com o eixo x - $\Delta = 0$

- Quando $\Delta = 0$, a parábola **tangencia** o eixo no ponto $x = -\frac{b}{2a}$

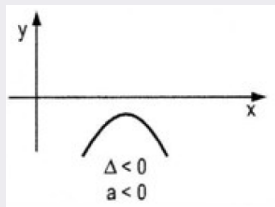
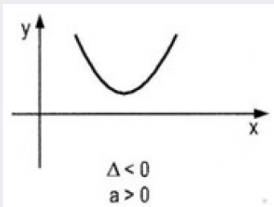


Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo x

Interseção com o eixo x - $\Delta < 0$

- ▶ Quando $\Delta < 0$, o gráfico **não possui ponto em comum** com o eixo x .



Função Quadrática

Principais Pontos de uma parábola - Interseção com o eixo y e o vértice

► Cruzamento com o eixo y

✓ É o ponto correspondente à $x = 0 \therefore y = c$

► O vértice da parábola é definido pelo par de pontos:

✓ Abscissa: $x_v = -\frac{b}{2a}$

✓ Ordenada: $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

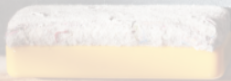
Domínio e Imagem

Domínio: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Imagem} = \begin{cases} a > 0 & , \quad \text{Im} = -y_v, \infty \\ a < 0 & , \quad \text{Im} = -\infty, y_v \end{cases}$$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

EXEMPLOS



Função Quadrática

Exemplo:

▶ Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, determine:

1. **Concavidade:**
2. **Valor de:**
 - ▶ a =
 - ▶ b =
 - ▶ c =
3. **Cruzamento com o eixo x**
4. **Cruzamento com o eixo y**
5. **Vértice da parábola**
6. **Representação Gráfica**
7. **Domínio**
8. **Imagem**

Função Quadrática

Exemplo:

► Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine:**

1. **Concavidade:**

Função Quadrática

Exemplo:

► Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine:**

1. Concavidade:

1.1 Como $a = 1; a > 0$

1.2 Logo, a concavidade está voltada para cima (CVC)

2. Valor das Constantes:

Função Quadrática

Exemplo:

▶ Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine:**

1. Concavidade:

1.1 Como $a = 1; a > 0$

1.2 Logo, a concavidade está voltada para cima (CVC)

2. Valor das Constantes:

▶ $a = 1$

▶ $b = -6$

▶ $c = 8$

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

✓ Sendo: $\Delta = b^2 - 4ac$

✓ Temos que : $\Delta = ??$

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

✓ Sendo: $\Delta = b^2 - 4ac$

✓ Temos que : $\Delta = ??$

$$\begin{aligned}\Delta &= (6)^2 - 4(1)(8) \\ &= 36 - 32 \\ &= 4\end{aligned}$$

Função Quadrática

Exemplo:

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Logo: $x = ??$

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Logo: $x = ??$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

Função Quadrática

Exemplo:

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Consequentemente: x_1 e $x_2 = ??$

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Consequentemente: x_1 e $x_2 = ??$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{6 + 2}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

Função Quadrática

Exemplo:

3. Cruzamento com o eixo x

✓ Consequentemente: x_1 e $x_2 = ??$

$$x_1 = \frac{6 + 2}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4$$

$$x_2 = \frac{6 - 2}{2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

Função Quadrática

Exemplo:

5. Cruzamento com o eixo y

✓ Fazendo: $x = 0$

5. Cruzamento com o eixo y

✓ Fazendo: $x = 0$

✓ Obtemos: $y = c \therefore y = 8$

6. Vértice da Parábola

5. Cruzamento com o eixo y

✓ Fazendo: $x = 0$

✓ Obtemos: $y = c \therefore y = 8$

6. Vértice da Parábola

$$\begin{aligned}x_v &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(6)}{2(1)} \\ &= 3\end{aligned}$$

5. Cruzamento com o eixo y

✓ Fazendo: $x = 0$

✓ Obtemos: $y = c \therefore y = 8$

6. Vértice da Parábola

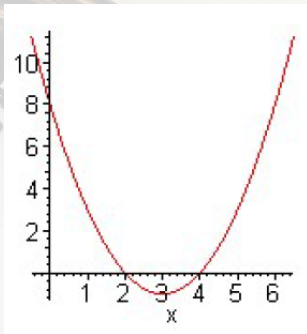
$$\begin{aligned}x_v &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(6)}{2(1)} \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \\ &= -\frac{4}{4(1)} \\ &= -1\end{aligned}$$

Função Quadrática

Exemplo:

7. Representação Gráfica

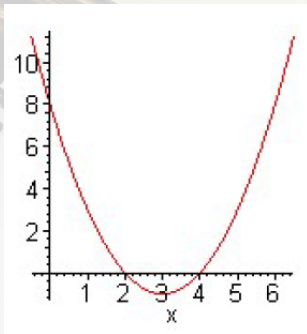


8. Domínio:

Função Quadrática

Exemplo:

7. Representação Gráfica

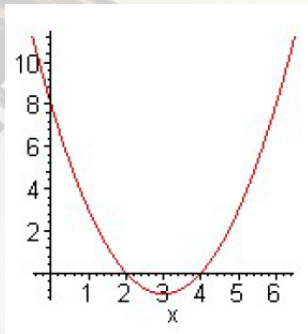


8. Domínio:

$$\checkmark D = -\infty, +\infty$$

9. Imagem:

7. Representação Gráfica



8. Domínio:

✓ $D = -\infty, +\infty$

9. Imagem:

✓ $Im = -1, +\infty$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

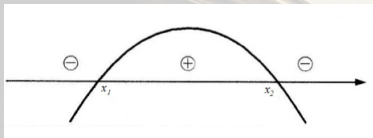
ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO



Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função

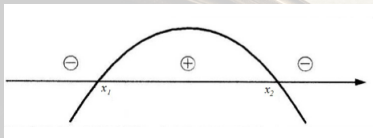
► Quando: $a < 0$



Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função

► Quando: $a < 0$

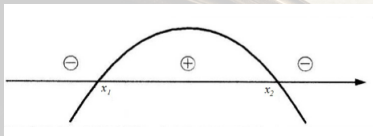


- ✓ $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
- ✓ $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
- ✓ $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

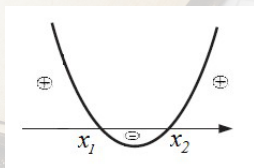
Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função

▶ Quando: $a < 0$



▶ Quando: $a > 0$

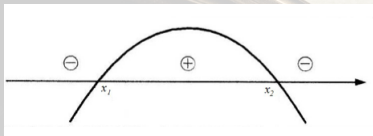


- ✓ $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
- ✓ $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
- ✓ $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

Função Quadrática

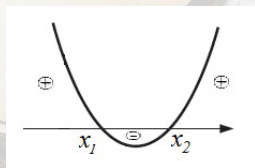
Estudo do Sinal da Função

▶ Quando: $a < 0$



- ✓ $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
- ✓ $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
- ✓ $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

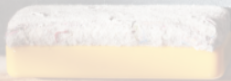
▶ Quando: $a > 0$



- ✓ $y < 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
- ✓ $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
- ✓ $y > 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

EXEMPLO



Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função - Exemplo

- ▶ Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$

- ▶ Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$
- ▶ Neste caso:
 - ✓ Temos a concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 \therefore a < 0$
 - ✓ Só precisamos encontrar os **pontos de intersecção** com o **eixo x**

- ▶ Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$
- ▶ Neste caso:
 - ✓ Temos a concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 \therefore a < 0$
 - ✓ Só precisamos encontrar os **pontos de intersecção** com o **eixo x**
- ▶ Fazendo $y = 0$, temos:

- ▶ Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$
- ▶ Neste caso:
 - ✓ Temos a concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 \therefore a < 0$
 - ✓ Só precisamos encontrar os **pontos de intersecção** com o **eixo x**
- ▶ Fazendo $y = 0$, temos:

$$-x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

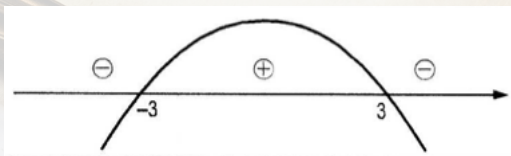
$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função - Exemplo

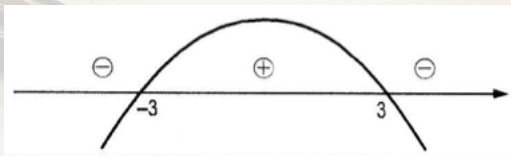
- Desta forma temos o gráfico:



Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função - Exemplo

- ▶ Desta forma temos o gráfico:

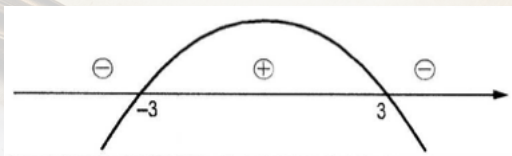


- ▶ Observando o gráfico concluímos que:

Função Quadrática

Estudo do Sinal da Função - Exemplo

- Desta forma temos o gráfico:

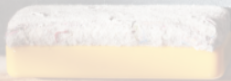


- Observando o gráfico concluímos que:

- ✓ $y > 0$ para: $-3 < x < 3$
- ✓ $y < 0$ para: $x < -3$ ou $x > 3$
- ✓ $y = 0$ para: $x = -3$ ou $x = 3$

FUNÇÃO QUADRÁTICA

EXERCÍCIOS



- Para as funções abaixo determine: **(i)** os principais pontos da parábola, **(ii)** o domínio, **(iii)** o conjunto imagem e **(iv)** a representação gráfica

1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = -x^2 + 2x - 1\}$

2. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 5x + 4\}$

3. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = -x^2 + 4\}$

4. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 16\}$

5. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x^2 + x\}$

6. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = -x^2 - x\}$

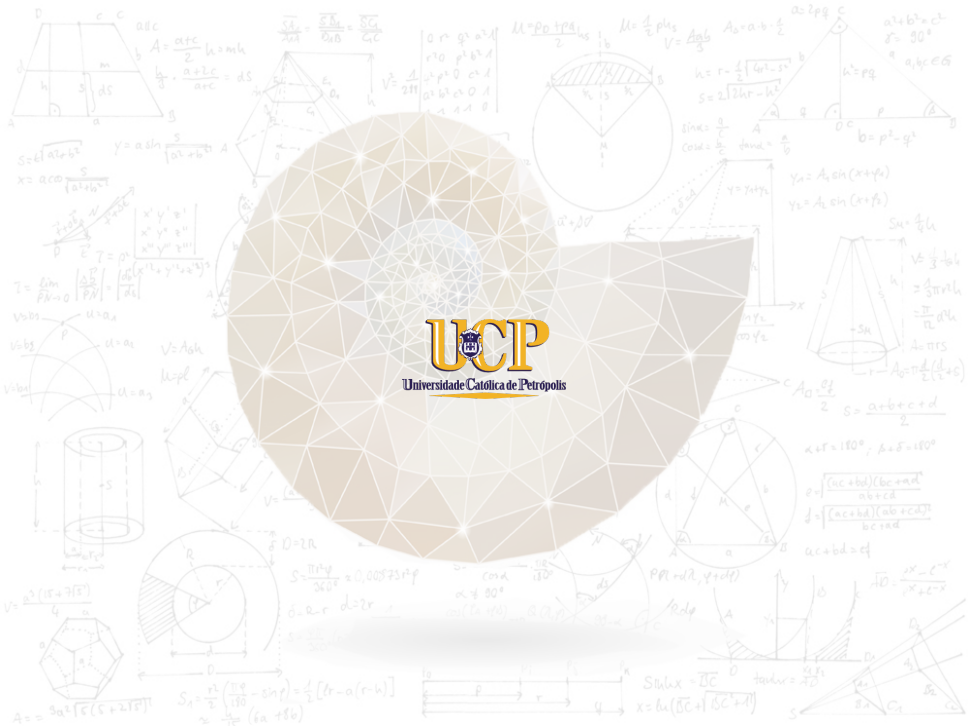
7. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = -x^2\}$

8. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = -2x^2 - 8x\}$

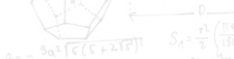
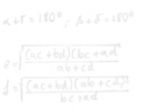
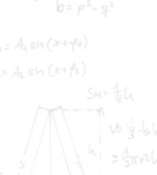
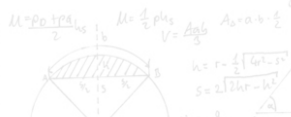
- ▶ Em uma certa plantação, a produção, P , de milho depende da quantidade, q , de fertilizante utilizada, e tal dependência pode ser expressa por: $P(q) = -q^2 + 30q + 175$. Considerando que, nessa lavoura, a produção é medida em kg e a quantidade de fertilizante em g/m^2 , determine:
1. (a) Os **coeficientes** dos termos da função; (b) a **concavidade**; (c) o ponto em que a curva **corta o eixo P**; (d) os **pontos** em que a curva corta o eixo q ; (e) o **vértice** da parábola;
 2. O esboço do **gráfico**;
 3. A quantidade de fertilizante para que a **produção seja máxima**, bem como a será a **produção máxima**.

- ▶ Um vendedor anotou as vendas de um eletrodoméstico nos **30 dias** em que trabalhou na seção de utilidades de uma loja de departamentos e notou que o número de aparelhos vendidos, **y**, em função do número de dias, **t**, pode ser obtido utilizando-se a equação: $y = 0,5t^2 - 8t + 32$.
- ▶ Assim sendo, **determine** :
1. (a) Os **coeficientes** dos termos da função; (b) a **concavidade**; (c) o ponto em que a curva corta o eixo t; (d) os **pontos** em que a curva corta o eixo y; (e) o **vértice** da parábola;
 2. O esboço do **gráfico**

- ▶ Em um ano, o valor, v , de uma ação negociada na bolsa de valores, no decorrer dos meses, t , é dado pela expressão $v = t^2 - 10t + 30$. Sabendo que o valor da ação é dado em reais, determine:
1. (a) Os **coeficientes** dos termos da função; (b) a **concavidade**; (c) o ponto em que a curva corta o eixo t ; (d) os **pontos** em que a curva corta o eixo v ; (e) o **vértice** da parábola;
 2. O esboço do **gráfico**



Universidade Católica de Petrópolis





CURSO DE BIOMEDICINA

CENTRO DE CIÊNCIAS DA SAÚDE

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PETRÓPOLIS

Matemática - Biomedicina

Funções Polinomiais do 2o. Grau

Maio de 2018

Luís Rodrigo de O. Gonçalves
luis.goncalves@ucp.br

Petrópolis, 16 de Maio de 2018