Universidade Católica de Petrópolis

Matemática 1

Funções Polinomiais
Aula 5: Funções Quadráticas
v. 0.1

Baseado nas notas de aula de Matemática I

da prof. Eliane dos Santos de Souza Coutinho

Luís Rodrigo de O. Gonçalves
luisrodrigoog@gmail.com

Petrópolis, 21 de Março de 2016

Content

Função Quadrática
- Principais pontos da parábola
- Estudo do sinal da função
- Aplicações
- Exercícios

Definição

- Dados três números reais a, b e c, com $a \neq 0$
- Denominamos **função quadrática** (ou do 2^0 **grau**) à função:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- **Em que**:
  1. a, b e c são úmeros reais;
  2. x é a variável independente;
  3. y é a variável dependente

Definição

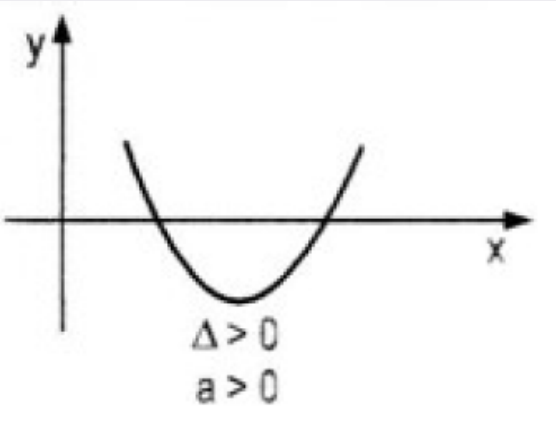
- O **gráfico cartesiano** da função quadrática é uma curva denominada **parábola**.
- Cuja **concavidade** é definida em função de a
  - $a > 0$: concavidade voltada para cima - **CVC**
  - $a < 0$: concavidade voltada para baixo - **CVB**

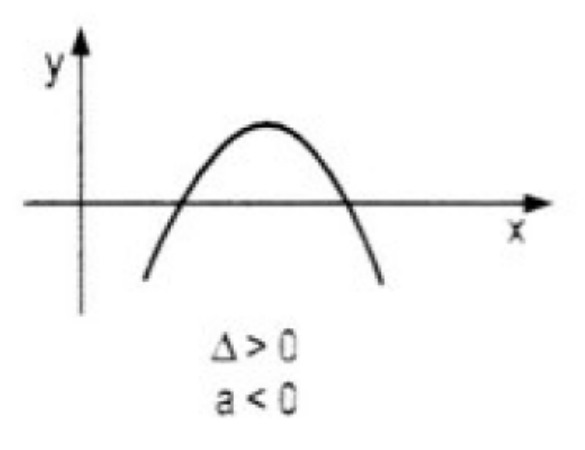
Interseção com o eixo x

- A **intercessão com o eixo** x corre quando $y = 0$
- Neste caso teremos:
  - $ax^2 + bx + c = 0$
- **Para o calculo de** x devemos utilizar a formula:
  - $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$
- Sendo:
  - $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$
  - $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$
- Onde:
  - $\triangle = b^2 - 4ac$

Interseção com o eixo x

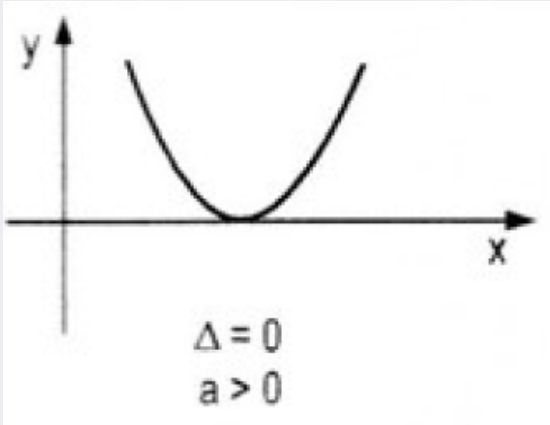
- Quando $\triangle > 0$ intercepta o eixo x em **dois pontos** x_1 e x_2

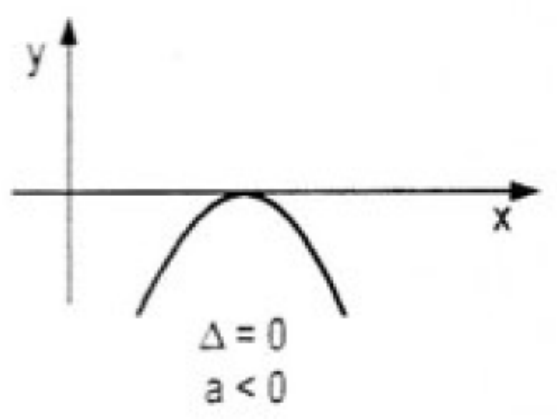




Interseção com o eixo x

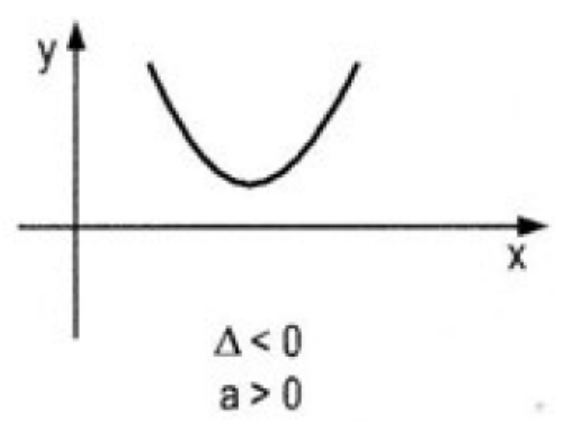
- Quando $\triangle = 0$ **tangencia** o eixo no ponto $x = -\dfrac{b}{2a}$

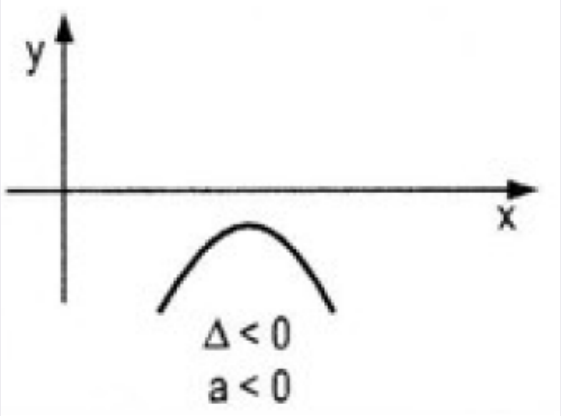




Interseção com o eixo *x*

- Quando $\triangle < 0$ **não possui ponto em comum** com o eixo x





Interseção com o eixo x e o vértice

- **Cruzamento com o eixo** y
  - É o ponto correspondente à $x = 0 \therefore y = c$
- O **vértice da parábola** é definida pelo par de pontos:
  - Abscissa: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
  - Ordenada: $y_v = -\dfrac{\triangle}{4a}$

Domínio e Imagem

Domínio: $x \in \Re$

$$\textbf{Imagem} = \begin{cases} a > 0 & , \quad \text{Im}{=}-y_v, \infty \\ a < 0 & , \quad \text{Im}{=}\ -\infty, y_v \end{cases}$$

Exemplo 01:

- Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine**:
  1. Concavidade:
  2. Valor de:
     - a =
     - b =
     - c =
  3. Cruzamento com o eixo x
  4. Cruzamento com o eixo y
  5. Vértice da parábola
  6. Representação Gráfica
  7. Domínio
  8. Imagem

Exemplo 01:

- Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine**:

  1. **Concavidade**:

Exemplo 01:

- Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine**:

1. **Concavidade**:
   1.1 **Como** $a = 1; a > 0$
   1.2 **Logo**, a concavidade está voltada para cima (CVC)
2. **Valor de**:

Exemplo 01:

- Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, **determine**:

1. **Concavidade**:
   1.1 **Como** $a = 1; a > 0$
   1.2 **Logo**, a concavidade está voltada para cima (CVC)

2. **Valor de**:
   - a = 1
   - b = -6
   - c = 8

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo** x

- Como: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$
- Sendo: $\triangle = b^2 - 4ac$
- Temos que : $\triangle = ??$

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo** x

- Como: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$
- Sendo: $\triangle = b^2 - 4ac$
- Temos que : $\triangle = ??$

$$\begin{aligned} \triangle &= (6)^2 - 4(1)(8) \\ &= 36 - 32 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo x**
   - Logo: $x = ??$

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo** x
   - Logo: $x =$??

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} \\
&= \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)} \\
&= \frac{6 \pm 2}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo** x
   - Consequentemente: x_1 e $x_2 = ??$

Exemplo 01:

3. **Cruzamento com o eixo** x
   - Consequentemente: x_1 e $x_2 = ??$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Exemplo 01:

5. **Cruzamento com o eixo** y
   - Fazendo $x = 0$

Exemplo 01:

5. **Cruzamento com o eixo** y
   - Fazendo $x = 0$
   - Obtemos $y = c \therefore y = 8$

6. **Vértice da Parábola**

Exemplo 01:

5. **Cruzamento com o eixo y**
   - Fazendo $x = 0$
   - Obtemos $y = c \therefore y = 8$

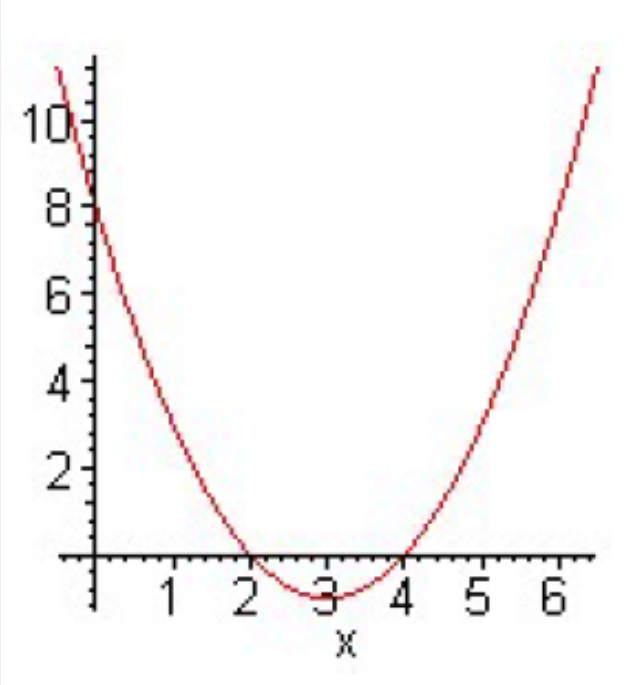
6. **Vértice da Parábola**

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(6)}{2(1)} = 3$$

$$y_v = -\frac{\triangle}{4a} = -\frac{4}{4(1)} = -1$$

Exemplo 01:

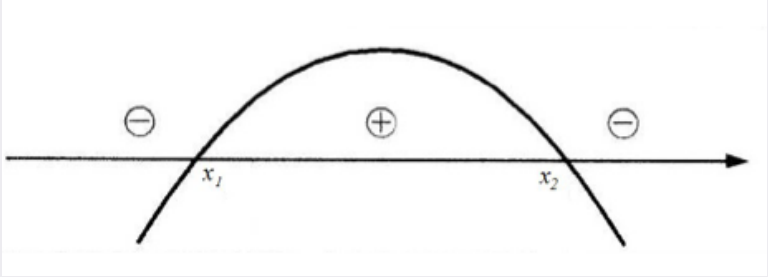
7. **Representação Gráfica**



8. **Domínio:**
   - $D = -\infty, +\infty$
9. **Imagem:**
   - $Im = -1, +\infty$

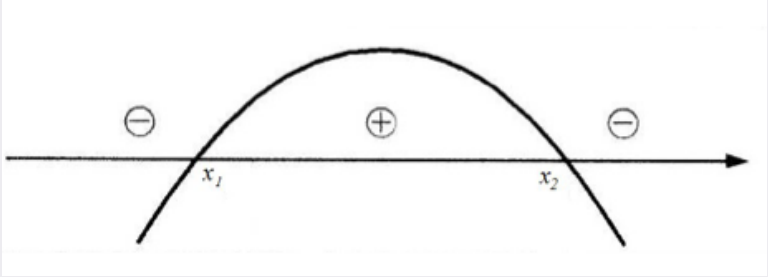
Sinal da Função

- Quando $a < 0$



Sinal da Função

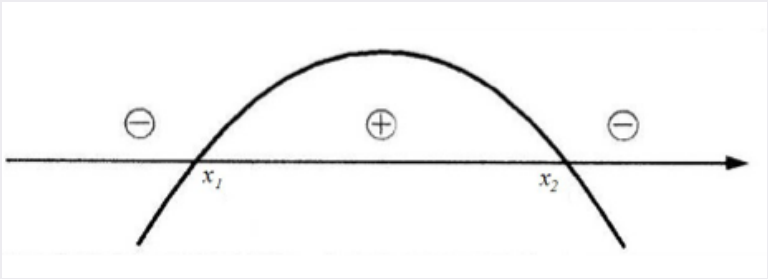
- Quando $a < 0$



  - $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
  - $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
  - $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

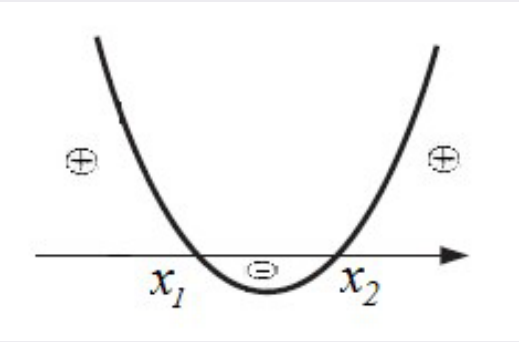
Sinal da Função

- Quando $a < 0$



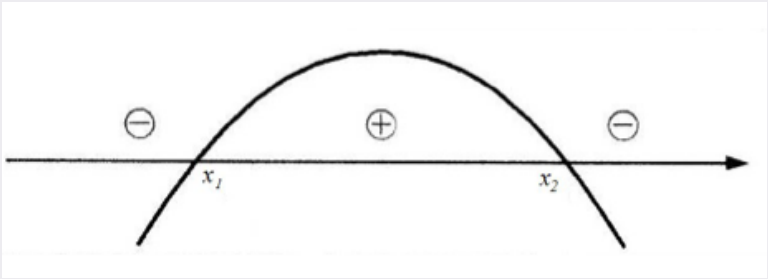
  - $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
  - $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
  - $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

- Quando $a > 0$



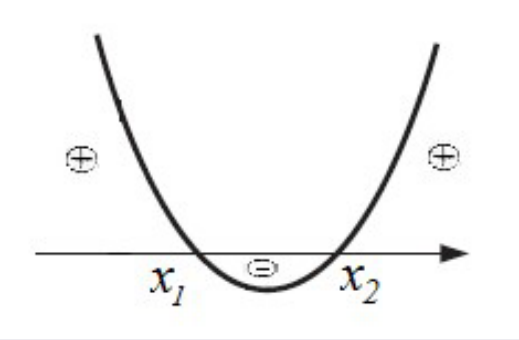
Sinal da Função

- Quando $a < 0$



  - $y > 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
  - $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
  - $y < 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

- Quando $a > 0$



  - $y < 0 \rightarrow x_1 < X < x_2$
  - $y = 0 \rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$
  - $y > 0 \rightarrow X < x_1$ ou $X > x_2$

Exemplo

- Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$
- Neste caso:
  - Temos a concavidade voltada para baixo, pois $a = 1 \therefore a < 0$
  - Só precisamos encontrar os **pontos de intersecção** com o **eixo x**
- Fazendo $y = 0$, temos:

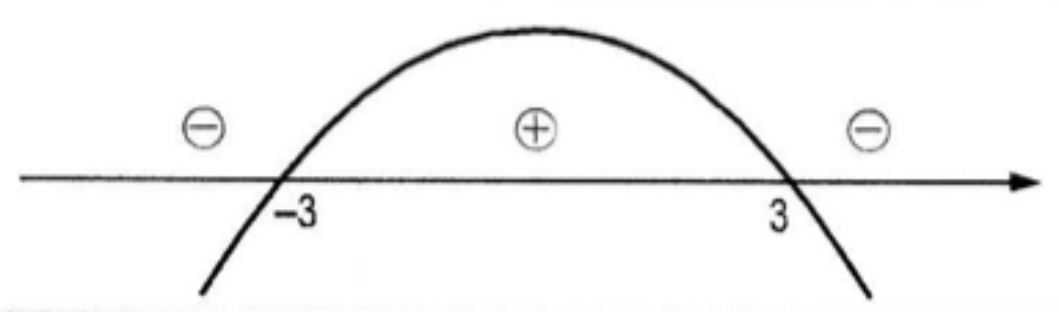
Exemplo

- Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$
- Neste caso:
  - Temos a concavidade voltada para baixo, pois $a = 1 \therefore a < 0$
  - Só precisamos encontrar os **pontos de intersecção** com o **eixo x**
- Fazendo $y = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
-x^2 + 9 &= 0 \\
-x^2 &= -9 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Desta forma temos o gráfico:



- **Observando o gráfico** concluímos que:
  1. $y > 0$ para $-3 < x < 3$
  2. $y < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$
  3. $y = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$

Função Quadrática - Aplicações

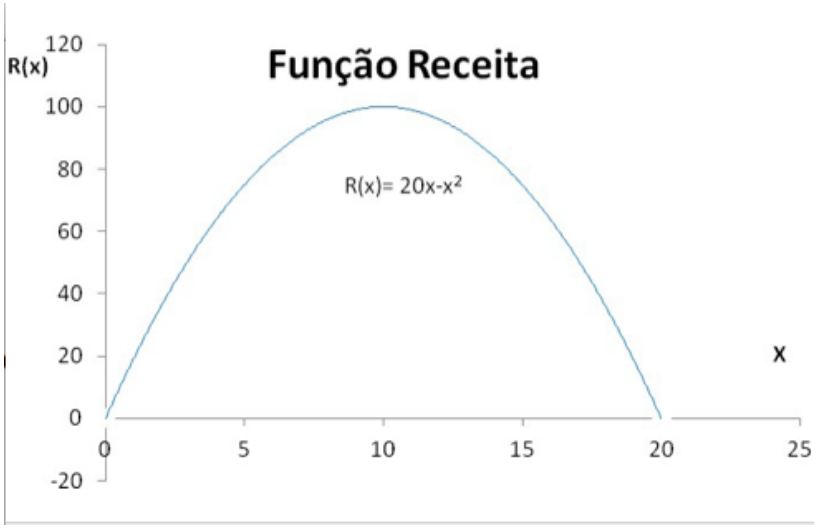
- A função demanda de um produto é dada por: $p = 20 - x$; e a função custo é $C = 30 + 3x$.
- Vamos obter:
  1. A função receita e o preço que a maximiza

- A função demanda de um produto é dada por: $p = 20 - x$; e a função custo é $C = 30 + 3x$.
- Vamos obter:
  1. A função receita e o preço que a maximiza

$$
\begin{aligned}
R &= p.x \\
&= (2x - x)x \\
&= 20x - x^2 \\
R &= -x^2 + 20
\end{aligned}
$$

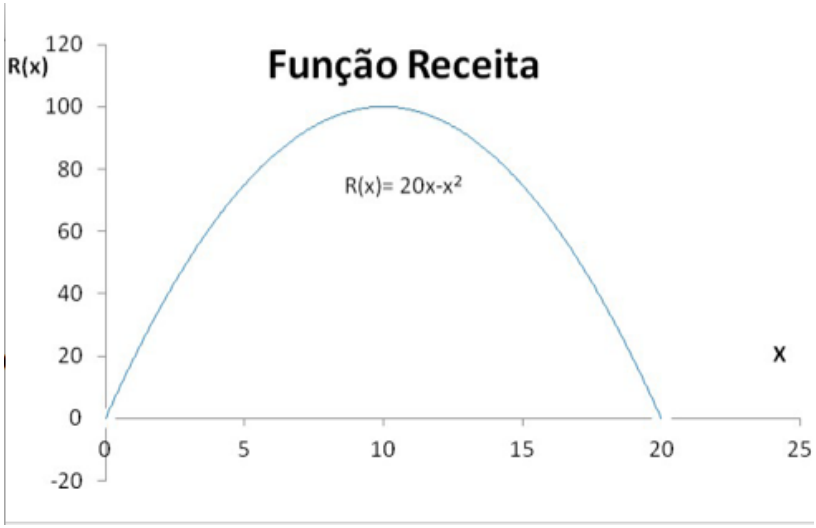
- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



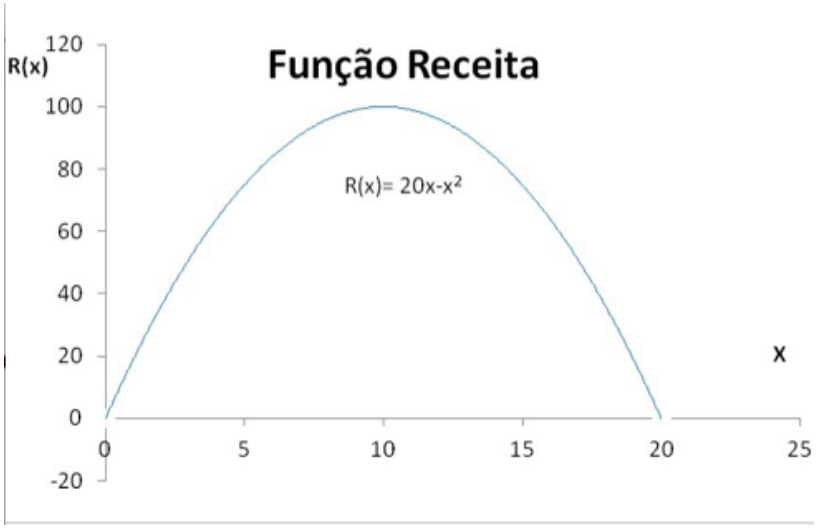
- O valor que maximiza é

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



- O valor que maximiza é $x = 10$
- Preço que maximiza é:

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



- O valor que maximiza é $x = 10$
- Preço que maximiza é:

$$\begin{aligned} p &= 20 - x \\ &= 20 - 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

R$10,00

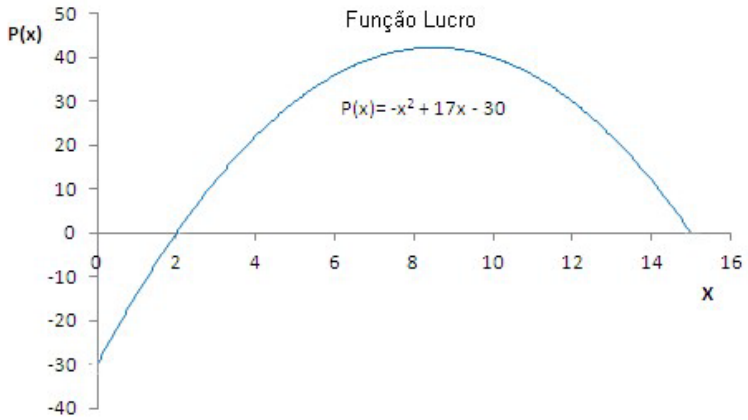
- A função demanda de um produto é dada por: $p = 20 - x$; e a função custo é $C = 30 + 3x$.
- Vamos obter:
  2. A função **lucro e preço** que **maximiza**

- A função demanda de um produto é dada por: $p = 20 - x$; e a função custo é $C = 30 + 3x$.
- Vamos obter:
  2. A função **lucro e preço** que **maximiza**

$$
\begin{aligned}
L &= R - C \\
&= 20x - x^2 - (30 + 3x) \\
L &= -x^2 + 17x - 30
\end{aligned}
$$

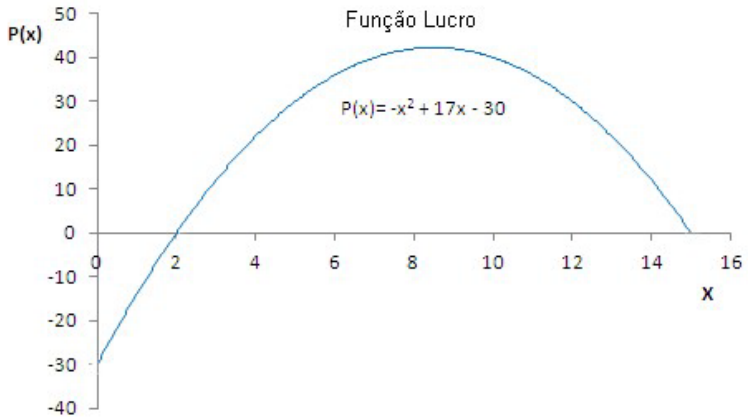
- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



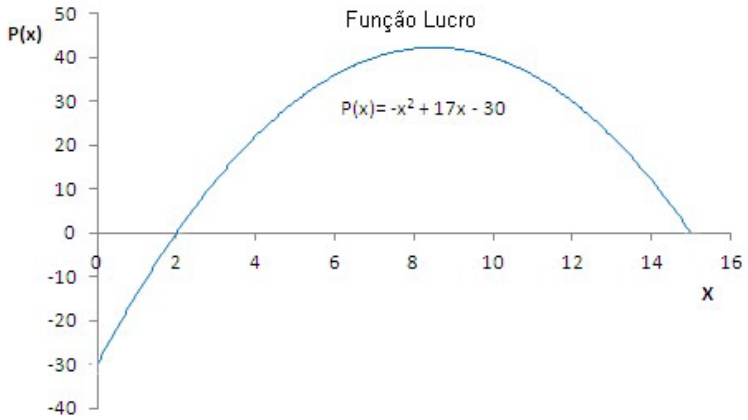
- O valor que maximiza é

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



- O valor que maximiza é $x = 8.5$
- Preço que maximiza é:

- Calculando os pontos da função e representando o gráfico, temos:



- O valor que maximiza é $x = 8.5$
- Preço que maximiza é:

$$\begin{aligned} p &= 20 - x \\ &= 20 - 8.5 \\ &= 11,50 \end{aligned}$$

R$11,50

- Vamos obter:
  3. O intervalo que deve variar o **preço** para que o **lucro** seja **não negativo**
     - Para $x = 2$ o preço é

- Vamos obter:
  3. O intervalo que deve variar o **preço** para que o **lucro** seja **não negativo**
     - Para $x = 2$ o preço é 18
     - Para $x = 15$ o preço é

- Vamos obter:
  3. O intervalo que deve variar o **preço** para que o **lucro** seja **não negativo**
     - Para $x = 2$ o preço é 18
     - Para $x = 15$ o preço é 5 então

- Vamos obter:
  3. O intervalo que deve variar o **preço** para que o **lucro** seja **não negativo**
     - Para $x = 2$ o preço é 18
     - Para $x = 15$ o preço é 5 então $5 \leq p \leq 18$

Função Quadrática - Exercícios

- Nos exercícios seguintes determine: (i) os principais pontos da parábola, (ii) o domínio, (iii) o conjunto imagem e (iv) a representação gráfica

1. $f = \{(x, y) \in \Re | y = -x^2 + 2x - 1\}$
2. $f = \{(x, y) \in \Re | y = x^2 - 5x + 4\}$
3. $f = \{(x, y) \in \Re | y = -x^2 + 4\}$
4. $f = \{(x, y) \in \Re | y = x^2 - 16\}$
5. $f = \{(x, y) \in \Re | y = x^2 + x\}$
6. $f = \{(x, y) \in \Re | y = -x^2 - x\}$
7. $f = \{(x, y) \in \Re | y = -x^2\}$
8. $f = \{(x, y) \in \Re | y = -2x^2 - 8x\}$

- Em uma certa plantação, a produção, **P**, de milho depende da quantidade, **q**, de fertilizante utilizada, e tal dependência pode ser expressa por $P(q) = -q^2 + 30q + 175$. Considerando nessa lavoura a produção medida em **kg** e a quantidade de fertilizante em g/m^2, determine:
  1. Os **coeficientes** dos termos da função; a **concavidade**; o ponto em que a curva corta o eixo P; os **pontos** em que a curva corta o eixo q; o **vértice** da parábola;
  2. O esboço do **gráfico**
  3. A quantidade de fertilizante para que a **produção seja máxima**, bem como a **produção máxima**.

- Um vendedor anotou as vendas de um eletrodoméstico nos 30 dias em que trabalhou na seção de utilidades de uma loja de departamentos e notou que o número de aparelhos vendidos, dado por **y**, em função do número de dias dado por **t**, pode ser obtido por $y = 0,5t^2 - 8t + 32$. Determine :
  1. Os **coeficientes** dos termos da função; a **concavidade**; o ponto em que a curva corta o eixo t; os **pontos** em que a curva corta o eixo y; o **vértice** da parábola;
  2. O esboço do **gráfico**

- Em um ano, o valor, **v**, de uma ação negociada na bolsa de valores, no decorrer dos meses, indicados por **t**, é dado pela expressão $v = t^2 - 10t + 30$. Sabendo que o valor da ação é dado em reais, determine:
  1. Os **coeficientes** dos termos da função; a **concavidade**; o ponto em que a curva corta o eixo t; os **pontos** em que a curva corta o eixo v; o **vértice** da parábola;
  2. O esboço do **gráfico**

...